

# Equações de Evolução em Processamento de Imagens

Marcos Craizer e Geovan Tavares

26/4/2001

## Introdução

Neste mini-curso apresentaremos algumas técnicas de processamento de imagens nas quais a imagem original é vista como uma condição inicial para uma equação diferencial e a imagem processada é a solução dessa equação em algum instante de tempo. As imagens podem ser em tons de cinza ou binárias. Neste último caso, podemos pensar na evolução da imagem como uma evolução das curvas ou formas.

Para poder trabalhar com equações diferenciais em imagens, precisamos assumir um modelo contínuo para elas. Uma vantagem decorrente disto é que podemos obter uma precisão espacial maior com estas operações. Também o tempo de evolução da imagem deve ser uma variável contínua. Este fato permite que controlemos a suavização da imagem através de um parâmetro contínuo, criando os chamados espaços de escala, que são representações de imagens em multi-resolução. No capítulo 1 dessas notas, fazemos uma descrição dos axiomas básicos de um espaço de escala.

Um espaço de escala muito utilizado em processamento de imagens é o gaussiano, que é regido pela equação do calor. Neste espaço, as versões suavizadas das imagens são obtidas através de filtros lineares na imagem original. Os filtros utilizados são filtros gaussianos cuja variância diminui com o aumento do parâmetro. No capítulo 2, veremos como esse espaço de escala tem várias propriedades desejáveis, tais como invariância por rotações, translações e homotetias na imagem original. É interessante observar que as soluções da equação do calor para tempos pequenos podem ser aproximadas por filtros de média.

Uma propriedade importante que o espaço de escala gaussiano não possui é a invariância por mudança de contraste. Isso quer dizer que se alterarmos o contraste de uma imagem, o espaço de escala gaussiano nos fornecerá uma representação em multi-resolução diferente da inicial. Esse fato muitas vezes não é desejável, pois uma alteração de contraste pode não significar uma alteração da cena. Por exemplo, uma alteração de iluminação em um ambiente altera o contraste sem alterar a cena.

Os espaços de escala invariantes por mudanças de contraste são chamados morfológicos. Uma característica básica dos operadores morfológicos é o fato de atuarem nos conjuntos de nível de uma imagem. No capítulo 3, descrevemos as operações básicas da morfologia de imagens binárias e como podemos estendê-las para imagens em tons de cinza, atuando em cada conjunto de nível.

Em um espaço de escala morfológico, as curvas de nível evoluem na direção normal com uma velocidade que depende de sua curvatura. No capítulo 4 descrevemos os espaços de escala morfológicos, enfatizando o espaço regido pela equação de curvatura e o espaço morfológico a-m. O movimento por curvatura possui várias propriedades geométricas notáveis, como por exemplo o fato de evoluir sem gerar singularidades. Estas propriedades fazem com que o espaço de escala correspondente seja bastante interessante, tanto para imagens como para formas. No apêndice, descrevemos algumas das propriedades geométricas do movimento por curvatura. É interessante mencionar que as soluções da equação de curvatura para tempos pequenos podem ser aproximadas por filtros de medianas, no mesmo sentido em que as soluções da equação do calor são aproximadas por filtros de média.

As evoluções de curvas na direção normal com velocidade dependente da curvatura são importantes não só do ponto de vista de espaços de escala, mas também em outros contextos. Esse tipo de movimento têm sido muito estudado, tanto do ponto de vista de teoria como de implementação. No capítulo 5, mostramos algumas aplicações dessas evoluções: Movimento por curvatura, movimento a-m por curvatura, morfologia diferencial e contornos ativos.

A evolução de imagens através de equações diferenciais é um tema de pesquisa bastante rico e atual. Nossa intenção com esse mini-curso é divulgar algumas das interessantes ideias

relacionadas a esse assunto. A escolha dos tópicos teve o objetivo de ser bastante ampla, de maneira que o leitor possa ter uma noção geral do tema. No entanto, os tópicos não são vistos com muita profundidade. Para minimizar esta falha, procuramos dar várias referências sobre cada assunto tratado.

Gostaríamos de agradecer a Ralph Costa Teixeira, nosso colega na PUC-Rio, por várias conversas que nos ajudaram a desvendar os segredos desse interessante movimento por curvatura. Agradecemos também aos nossos alunos Luiz Gustavo Nogara, Frederico Abraham e Reinaldo Mello, do departamento de matemática da PUC-Rio. Eles foram os autores de um programa de morfologia, a partir do qual as imagens do capítulo 3 foram geradas e também foram responsáveis pela geração de todas as outras imagens, só que dessa vez utilizando o software Megawave (ver [4]).



# Capítulo 1

## Espaços de Escala para Imagens

Um espaço de escala para imagens é uma estrutura capaz de representar imagens em vários níveis de resolução. Nestas notas consideraremos espaços de escala regidos por equações diferenciais parciais. Esses espaços têm algumas propriedades de regularidade muito úteis do ponto de vista matemático. Neste capítulo, descreveremos alguns axiomas que nos conduzem a esses modelos.

Um espaço de escala é um esquema de representação de imagens em vários níveis de resolução. A representação de uma imagem em um determinado espaço de escala é obtida através de operadores  $T_t$ ,  $t > 0$ : Para uma imagem inicial  $u_0(x)$ ; a sua representação no espaço de escala são as imagens

$$u(x; t) = T_t(u_0)(x)$$

Para poderem ser úteis, os espaços de escala devem satisfazer a certos axiomas básicos, que dividimos em 2 grupos. Os axiomas do primeiro grupo deñem propriedades de regularidade no espaço, e nós os chamaremos de estruturais. Os do segundo grupo deñem algumas propriedades básicas de invariância por transformações da imagem, e nós os chamaremos de axiomas básicos de invariância. Existem outras invariâncias desejáveis em um espaço de escala, que discutimos também nesse capítulo.

### 1.1 Axiomas Estruturais

- 2 Causalidade - Em um espaço de escala, imaginamos que a imagem vai se simplificando na medida em que  $t$  cresce e que a imagem em uma escala maior possa ser obtida de uma outra em escala menor. Isto quer dizer que a imagem na escala  $s > t$  pode ser obtida da imagem na escala  $t$  através de um operador  $T_{t;s}$ : Escrevemos então

$$T_s(u) = T_{t;s}T_t(u) :$$

No caso em que  $T_{t;s}(v) = T_{s;t}(v)$ , dizemos que o espaço de escala é recursivo.

- 2 Princípio de comparação - Se uma imagem é menor do que outra, a simplificação pelo espaço de escala deve preservar esta ordem. Se  $u_0(x) \leq v_0(x)$ ; então  $u(x; t) \leq v(x; t)$ : O princípio de comparação local é o seguinte: Se  $u_0(y) \leq v_0(y)$  em uma vizinhança de  $x$ ; então  $u(x; t) \leq v(x; t)$ ; para  $0 < t < h$ :
- 2 Regularidade - Esta é uma condição de suavidade na evolução de imagens quadráticas. Como veremos no teorema a seguir, esta condição mais o princípio de comparação local implicam a evolução suave de qualquer imagem suave. Sendo  $u(y) = \frac{1}{2} < A(y_i - x); y_i - x >$

+  $\langle p; y \rangle + c$  uma forma quadrática qualquer, dizemos que o espaço de escala é regular se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{t,t+h}(u) - T_t(u)}{h} = F(A; p; c; x; t)$$

onde  $F$  é uma função contínua com relação a primeira variável.

**Teorema 1 ([2]):** Suponha que um espaço de escala satisfaça os princípios de causalidade, comparação local e regularidade. Então, se  $u$  é uma função de classe  $C^2$ ; temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{t,t+h}(u) - T_t(u)}{h} = F(D^2u(x); Du(x); u(x); x; t)$$

Além disso,  $F$  é contínua e não decrescente na primeira variável.

## 1.2 Axiomas Básicos de Invariância

Uma análise multi-resolução não deve depender da posição, orientação e tamanho da imagem inicial. Também não deve depender de um deslocamento dos níveis de cinza da imagem.

- <sup>2</sup> Invariância por translações e rotações da imagem- A análise multi-resolução de uma imagem não deve depender da sua posição no plano. Neste caso, dizemos que o espaço de escala é invariante por translações do plano. Também não deve depender da sua orientação, em cujo caso dizemos que o espaço de escala é invariante por rotações do plano. O espaço de escala  $T_t; t \geq 0$ ; é invariante por translações da imagem se

$$T_t(\zeta_x u) = \zeta_x (T_t u)$$

onde  $\zeta_x u(y) = u(y - x)$ :

**Proposição 2 ([3]):** A função  $F$  associada a um espaço de escala com a propriedade de invariância por translações da imagem não depende de  $x$ :

O espaço de escala  $T_t; t \geq 0$ ; é invariante por rotações da imagem se

$$T_t \circ R(x) = R \circ T_t(x)$$

onde  $R$  é uma rotação do plano.

**Proposição 3 ([3]):** A função  $F$  associada a um espaço de escala com a propriedade de invariância por rotações da imagem satisfaz

$$F(RAR^t; R; p; t) = F(A; p; t)$$

- <sup>2</sup> Invariância por translações nos tons de cinza- Também gostaríamos que a análise multi-resolução fosse invariante por translações no nível de cinza da imagem.

O espaço de escala  $T_t; t \geq 0$ ; é invariante por translações nos tons de cinza se  $T_t(u + c) = T_t u + c$ :

**Proposição 4 ([3]):** A função  $F$  associada a um espaço de escala com a propriedade de invariância por translações nos tons de cinza não depende da terceira variável:

- <sup>2</sup> Invariância por homotetias da imagem- A análise multi-resolução não deve depender do tamanho inicial da imagem.

Dizemos que o espaço de escala  $T_t; t \geq 0$  é invariante por homotetias se

$$T_t \circ H_s(x) = H_s \circ T_{t^0}(x)$$

com  $t^0(t; s)$  diferenciável com relação a  $s$  em  $s = 1$  e  $\frac{\partial t^0}{\partial s}(t; 1) > 0$  é contínua e positiva para  $t > 0$ :

Proposição 5 ([3]): Se um espaço de escala é invariante por mudança de escala, é possível reescalonar o tempo de forma que  $t^0(t; s) = s \cdot t$ :

Proposição 6 ([3]): Se um espaço de escala é invariante por mudança de escala, então, após o reescalonamento,  $F$  deve satisfazer

$$F(1^2 A; 1p; t) = 1 F(A; p; 1t)$$

### 1.3 Espaços de Escala Lineares

Uma propriedade importante em um espaço de escala é a linearidade. Esta propriedade permite a utilização de ferramentas matemáticas poderosas, como por exemplo a transformada de Fourier.

Dizemos que o espaço de escala  $T_t; t \geq 0$  é linear se

$$T_t(au + bv) = aT_t(u) + bT_t(v)$$

para quaisquer  $t \geq 0; a; b \in \mathbb{R}$ :

Ocorre que o único espaço de escala linear que satisfaz os axiomas estruturais e básicos de invariância é o gaussiano. Este espaço é muito utilizado em processamento de sinais e imagens e será o objeto do próximo capítulo.

### 1.4 Espaços de Escala Morfológicos

Durante o processo de aquisição de uma imagem, é usual ocorrerem mudanças não-lineares de contraste na imagem. Isto pode ser uma característica do equipamento utilizado ou então por uma intervenção do usuário, como por exemplo a injeção de corantes em imagens biológicas. Por este motivo, muitas vezes queremos trabalhar em um espaço de escala invariante por mudanças de contraste.

Dizemos que o espaço de escala  $T_t; t \geq 0$  é invariante por mudança de contraste se

$$T_t \circ g = g \circ T_t$$

para qualquer função não decrescente  $g$ : Os espaços de escala com essa propriedade são chamados morfológicos.

Proposição 7 ([3]): Se um espaço de escala é invariante por mudança de contraste, então a função associada  $F$  satisfaz

$$F(1^2 A + s p - p; 1p; t) = 1 F(A; p; t)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ :

Uma característica dos espaços de escala morfológicos é o fato de atuarem nas curvas de nível da imagem. Denotando por  $\text{curv}(u)(x)$  a curvatura (a menos de sinal) da curva de nível da imagem  $u$  que passa por  $x$ , temos o seguinte teorema:

**Teorema 8 ([3]):** Se um espaço de escala é invariante por rotações e translações do plano e é morfológico, então ele obedece a uma equação da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k r |u| G(\text{curv}(u); t) \quad (1.1)$$

onde  $G$  é contínua e não-decrescente com relação ao primeiro argumento.

**Teorema 9 ([3]):** Suponha um espaço de escala morfológico, invariante por rotações e translações do plano, seja também invariante por homotetias. Então, após a normalização da escala, ele deve satisfazer a uma equação da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k r |u|^{-1} (\text{tcurv}(u))$$

onde  $^{-1}$  é contínua e não-decrescente.

**Observação Importante:** O espaço de escala gaussiano não é morfológico. Isso faz com que, ao escolher um espaço de escala, tenhamos que optar entre linearidade e invariância por mudança de contraste.

## 1.5 Invariância Projetiva e $A^{-1}m$

Seria interessante ter um espaço de escala que não dependesse da posição do observador de uma cena. Um tal espaço deveria ser invariante por transformações projetivas do plano. Ocorre que não existe um espaço de escala morfológico invariante por todas as transformações projetivas ([2]). Temos então que nos contentar com um espaço de escala que não dependa da posição do observador de uma cena, desde que ele esteja suficientemente longe da cena. Esse espaço deve ser invariante por transformações afixas do plano.

Dizemos que o espaço de escala  $T_t; t \geq 0$ ; é invariante por transformações afixas da imagem se for invariante por homotetias e a função  $t^0$  definida acima puder ser estendida a  $t^0(t; A)$ ; para  $t > 0$  e  $A$  transformação linear invertível do plano, satisfazendo  $t^0(t; \cdot Id) = t^0(t; \cdot)$  e

$$T_t \pm A(x) = A \pm T_{t^0}(x)$$

**Proposição 10 ([3]):** Se um espaço de escala é invariante por transformações afixas, é possível reescalonar o tempo de forma que  $t^0(t; A) = t |j \det A|^{1=2}$ :

**Proposição 11 ([3]):** Se um espaço de escala é invariante por transformações afixas, então, após o reescalonamento,  $F$  deve satisfazer

$$F(BAB^t; Bp; t) = |j \det B|^{1=2} F(A; p; |j \det B|^{1=2} t)$$

Em [2], foi demonstrado que existe um único espaço de escala morfológico invariante por transformações afixas. Este espaço está definido pela equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k r |u| (\text{tcurv}(u))^{1=3} \quad (1.2)$$

# Capítulo 2

## Espaço de Escala Gaussiano

O único espaço de escala linear que satisfaz os axiomas básicos de invariância é o espaço de escala gaussiano. Neste espaço, uma imagem na escala  $t$  é obtida da imagem inicial como solução da equação do calor.

O espaço de escala gaussiano é um espaço de escala bastante utilizado em processamento de sinais e imagens. Uma das razões para isso é o fato de ele ser muito bem entendido, com fórmulas explícitas para sua evolução.

### 2.1 A equação do calor

Dada uma condição inicial  $u_0(x)$ , procuramos uma evolução  $u(x; t)$  satisfazendo a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x; t) = \Delta u(x; t)$$

onde  $\Delta u$  denota o laplaciano de  $u$ : Esta equação é chamada de equação do calor.

É um fato bem conhecido que a equação do calor admite uma única solução  $u$  dada por

$$u(x; t) = G_t * u(x; 0);$$

onde

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

é a função gaussiana e  $*$  indica convolução. Portanto no espaço de escala associado a equação do calor, o operador  $T_t$  é exatamente a convolução com a gaussiana  $G_t$ :



Imagem original



Após o filtro gaussiano.

No domínio da frequência, a equação do calor é dada por

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\xi; t) = -|\xi|^2 U(\xi; t);$$

cujas soluções são

$$U(x; t) = U(x; 0) \exp \left( - \sum_j \lambda_j^2 t \right) ;$$

Esta fórmula nos mostra que a equação do calor atenua a presença de altas frequências da imagem, preservando as baixas.

## 2.2 Caracterização do Espaço Gaussiano

Nesta seção demonstraremos que o único espaço de escala linear invariante por rotações e translações e imagem e por translação dos níveis de cinza é o espaço Gaussiano.

Um espaço de escala linear invariante por rotações e translações da imagem e por translações dos níveis de cinza deve ser regido por uma equação diferencial da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_t(D^2 u; Du) ;$$

onde  $F_t(A; p)$  é um funcional linear satisfazendo a igualdade

$$F_t(RAR^T; Rp) = F_t(A; p) ;$$

para quaisquer matriz simétrica  $A$ ; vetor  $p$ ; tempo  $t$  e matriz de rotação  $R$ : Estamos usando a notação  $B^T$  para a transposta da matriz  $B$ :

Um funcional linear nas variáveis  $A$  e  $p$  pode ser escrito na forma

$$F_t(A; p) = M_t \cdot A + v_t \cdot p ;$$

onde  $M_t$  é uma matriz simétrica,  $v_t$  um vetor e  $\cdot$  denota multiplicação entrada a entrada. Considerando que  $A$  pode ser a matriz nula, temos que

$$v_t \cdot p = v_t \cdot Rp ;$$

para todo vetor  $p$  e matriz de rotação  $R$ : Se, para algum  $t$ ;  $v_t \neq 0$ ; a igualdade acima não se verificaria. Portanto  $v_t = 0$  para todo  $t$  e logo

$$F_t(A; p) = M_t \cdot A ;$$

Como  $M_t \cdot A = M_t \cdot RAR^T$ ;  $M_t \cdot A$  só pode depender dos auto-valores de  $A$ ; e é simétrica com relação a eles. Concluímos que  $M_t \cdot A$  deve ser a soma dos autovalores de  $A$  multiplicada por alguma constante  $c(t)$ : Em outras palavras

$$F_t(A; p) = c(t) \text{tr}(A) ;$$

**Proposição 1:** Dada uma função positiva  $b(s)$ ; podemos reescalonar a equação acima de forma que ela se torne

$$\frac{\partial u}{\partial s} = b(s) \Delta u ;$$

Em particular, considerando  $b(s) = 1$  teremos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \Delta u ;$$

**Demonstração:** Consideremos um reescalonamento  $s = s(t)$ : Então

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} = c(t) \Delta u \frac{dt}{ds} ;$$

Procuramos um reescalonamento de forma que

$$c(t) \frac{dt}{ds} = b(s) :$$

Denotemos por  $C(t)$  a integral indefinida de  $c(t)$  com  $c(0) = 0$  e por  $B(s)$  a integral indefinida de  $b(s)$  com  $B(0) = 0$ : Integrando a equação acima obtemos  $C(t) = B(s)$ : Definimos então o reescalonamento por

$$s = B^{-1}(C(t)) ;$$

obtendo o resultado desejado.

## 2.3 Invariâncias do Espaço Gaussiano

O espaço de escala Gaussiano possui várias propriedades de invariância. É invariante por translações e rotações da imagem e também por transformações a-ns no nível de cinza (verifique!). No entanto, o espaço de escala Gaussiano não é invariante por mudanças quaisquer de contraste, como podemos ver nas imagens abaixo.

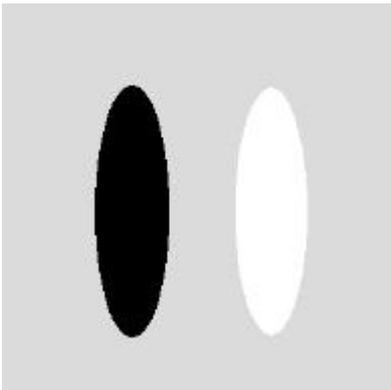
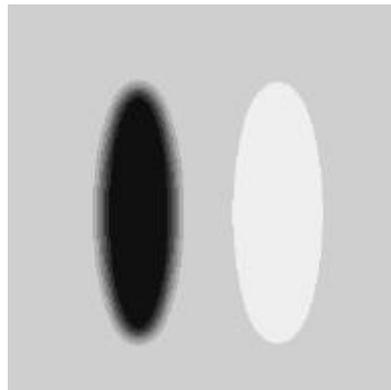


Imagem 1



Eq calor + quantização na imagem 1

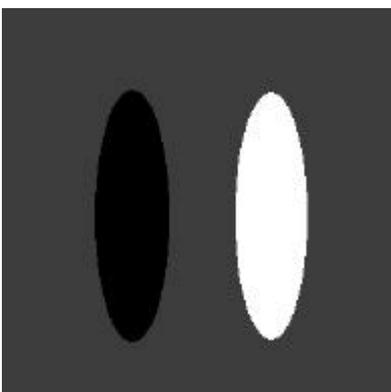


Imagem 2



Eq calor + quantização na imagem 2

O espaço gaussiano não é invariante por transformações a-ns, mas é invariante por homotetias, como podemos verificar na proposição seguinte:

Proposição 2: A equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c(t) \Delta u$$

é invariante por homotetias da imagens. No caso de  $c(t) = 1$ ; o reescalonamento deve ser da forma  $s(t) = \frac{1}{2}t^2$ : Para um reescalonamento da forma  $s(t) = \frac{1}{2}t$ ; devemos tomar  $c(t) = t$ :

**Demonstração:** A invariância por homotetia de razão  $\frac{1}{2} > 0$  é expressa pela equação

$$T_s \pm H_{\frac{1}{2}} = H_{\frac{1}{2}} \pm T_t$$

onde  $s = s(t)$  é um reescalonamento da equação do calor.

Considere uma solução  $u(x; y; t)$  da equação acima. Procuraremos uma outra solução  $v(x; y; t)$  cuja condição inicial seja  $v(x; y; 0) = u(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}; 0)$ : Para verificarmos que a equação do calor é invariante por homotetias, esta solução deve ser da forma  $u(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}; s(t))$ :

Mas  $u(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}; s)$  é solução da equação do calor se  $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2}c(s)\nabla^2 u$ : Como  $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds}$  concluímos que

$$c(t) \frac{dt}{ds} = \frac{1}{2}c(s) :$$

Sendo  $C(t)$  a integral indefinida de  $c(t)$  com  $C(0) = 0$  temos que

$$C(t) = \frac{1}{2}C(s)$$

e portanto

$$s(t) = C^{-1}(\frac{1}{2}C(t)) :$$

No caso particular em que  $c(t) = 1$ ; temos que  $s(t) = \frac{1}{2}t^2$ : E para que  $s(t) = \frac{1}{2}t$ ; é preciso que  $c(t) = t$ :

## 2.4 Filtro de Médias Infinitesimal

Um filtro de imagens muito conhecido é o filtro de médias. Para  $h > 0$ ; definimos

$$M_h u(x) = \frac{1}{A(B_h(x))} \iint_{B_h(x)} u(y) dA(y) ;$$

onde  $B_h(x)$  é o disco de raio  $h$  e centro  $x$  e  $dA$  é o elemento de área nesse disco. O filtro de médias é um filtro linear que elimina altas frequências da imagem, e portanto visualmente suaviza a imagem.

Ocorre que se  $h$  é pequeno, o filtro de médias se torna muito parecido com o filtro gaussiano. A seguinte proposição está demonstrada em [3]:

**Proposição 3:** Sendo  $u$  uma função de classe  $C^2$ ; temos que

$$M_h u(x) = u(x) + \frac{h^2}{8} \nabla^2 u(x) + O(h^3) :$$

Como consequência dessa proposição obtemos que a solução da equação do calor em um certo tempo pode ser aproximada por um filtro de médias com um fator de escala  $h$  adequado.

# Capítulo 3

## Morfologia Matemática

Algumas operações em imagens são estreitamente relacionadas à forma dos objetos. Essas operações são chamadas morfológicas e fazem parte de uma parte do processamento de imagens conhecida como morfologia matemática. As operações morfológicas dependem sempre de um ou mais elementos estruturantes. O tipo desses elementos estruturantes determina a forma dos objetos que queremos selecionar ou excluir. Como existe uma variedade enorme de tipos diferentes de elementos estruturantes, existe também uma grande variedade de filtros morfológicos. E esses filtros podem ter também os usos mais variados.

Originalmente, os filtros morfológicos foram definidos em conjuntos, ou imagens binárias, e somente algum tempo depois foram estendidas para imagens em tons de cinza. Essa extensão é feita aplicando-se os filtros de imagens binárias em cada um dos conjuntos de nível da imagem em tons de cinza. Desse modo, os filtros morfológicos para imagens em tons de cinza são invariantes por mudança de contraste.

### 3.1 Operações em Imagens Binárias

#### 3.1.1 Erosão e Dilatação

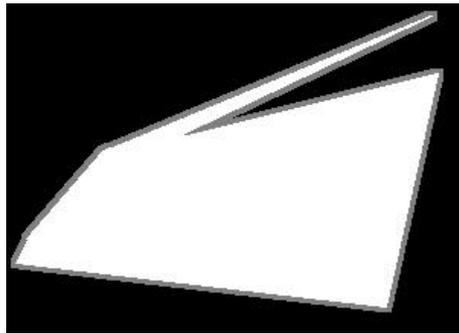
As duas operações básicas da morfologia matemática são a erosão e a dilatação. Dado um elemento estrutural  $B$ , define-se a dilatação de um conjunto  $F$  pela fórmula

$$X \oplus B = \{x + b \mid x \in X; b \in B\}$$

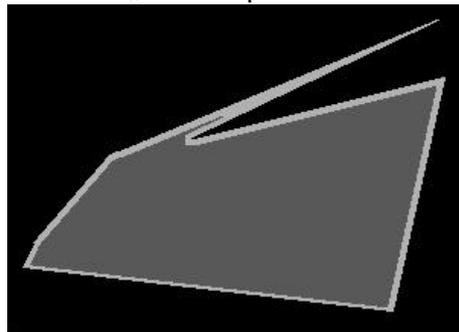
e a erosão de  $F$  por

$$X \ominus B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x + B \subseteq X\}$$

A dilatação e a erosão de uma imagem binária com o elemento estruturante  $B$  sendo uma matriz  $7 \times 7$  de 1's são mostradas nas figuras abaixo.



O objeto cinza e branco é obtido pela dilatação do objeto branco.



A erosão do objeto branco é o objeto cinza.

Define-se a dilatação condicional de um conjunto  $X^m$  pelo elemento estrutural  $B$  com relação a  $X$  por

$$\pm_B(X^m | X) = (X^m \odot B) \setminus X :$$

Se repetirmos esta operação várias vezes obteremos as componentes conexas de  $X$  que contem algum ponto de  $X^m$ ; que é chamada de imagem reconstruída a partir do marcador  $X^m$ .

Abaixo temos um exemplo de uma imagem marcada e depois reconstruída.



Imagem em branco e marcador em cinza. Imagem reconstruída em cinza.

### 3.1.2 Abertura e Fechamento

Compondo a erosão e a dilatação, obtemos duas operações também básicas, a abertura e o fechamento. A abertura de um conjunto  $X$  é definida por

$$X \pm B = X \odot (X \pm B)$$

e o fechamento por

$$X \pm B = X \pm (X \odot B) :$$

Uma propriedade importante da abertura e do fechamento é a idempotência. Esta propriedade significa que após aplicarmos uma vez a abertura ou o fechamento em uma imagem,

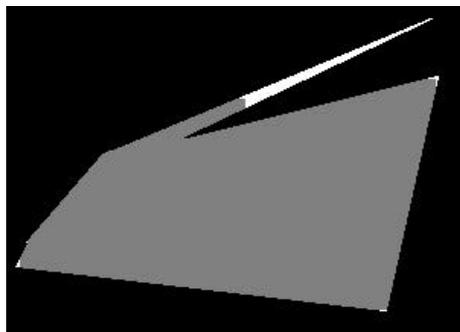
outras aplicações do mesmo operador não mais a alterarão. Matematicamente, a idempotência pode ser expressa como

$$(X \circ B) \circ B = X \circ B$$

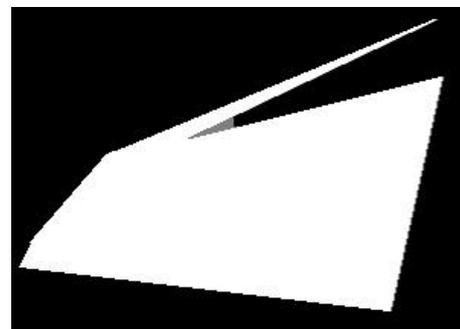
e

$$(X \oplus B) \oplus B = X \oplus B :$$

Para o mesmo B acima, vejamos como se comportam a abertura e o fechamento de uma imagem binária. Observe que a abertura elimina pontas de F enquanto que o fechamento elimina pontas do complementar  $X^c$  de X:



A imagem cinza  $F$  obtida da branca e cinza pela abertura.



A imagem branca e cinza  $F$  obtida da branca pelo fechamento.

Uma outra operação binária útil é a abertura por área. Essa operação simplesmente elimina as componentes da imagem que tenham área menor do que um certo valor previamente determinado. É útil para eliminar objetos excessivamente pequenos. No exemplo abaixo eliminamos objetos com área menor do que 50 pixels.



Imagem original.

Imagem após abertura por área.

### 3.1.3 Filtro da Mediana

Considerando o elemento estruturante como a bola de raio  $h$ ; definimos o filtro da mediana em uma imagem binária  $X$  através da relação

$$\text{med}_h(X)(x) = \begin{cases} 0; & \text{se } A(X \setminus B_h(x)) \cdot A(B_h(x)) = 2 \\ 1; & \text{se } A(X \setminus B_h(x)) > A(B_h(x)) = 2 \end{cases};$$

onde  $A(R)$  indica a área da região  $R$ :

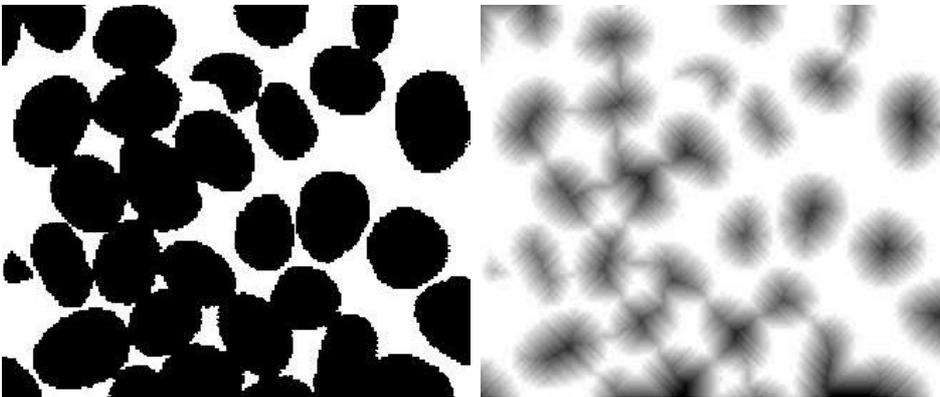
Em uma imagem binária discretizada, consideramos como elemento estruturante um quadrado  $M_n$  de tamanho  $(2n + 1) \times (2n + 1)$  e definimos

$$\text{med}_n(X)(x) = \begin{cases} 0; & \text{se } \#(X \setminus M_n(x)) \cdot (2n + 1)^2 = 2 \\ 1; & \text{se } \#(X \setminus M_n(x)) > (2n + 1)^2 = 2 \end{cases};$$

### 3.1.4 Função Distância e Eixo Medial

Uma ferramenta bastante útil na análise de imagens binárias é a função distância. Dado um conjunto  $X$ ; a distância de um ponto  $x \in X$  é definida como a menor distância de um ponto de  $X$  a  $x$ , e denotada por  $d(x; X)$ : Essa função distância pode ser vista como uma imagem em tons de cinza, considerando o valor dessa distância em cada ponto como o seu nível de cinza. Para uma discussão sobre a função distância, ver [6].

Vemos abaixo uma imagem binária e sua função distância.

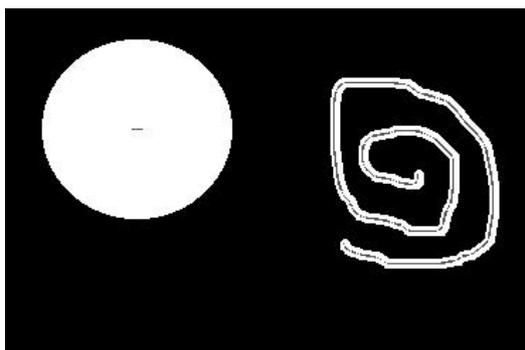


Uma representação da forma de um objeto é dada pelo seu eixo medial, também chamado esqueleto. Para definir o esqueleto de um conjunto  $X$ ; para cada  $x \in X$ ; denote por  $D(x)$  o maior disco centrado em  $x$  e contido em  $X$ : O ponto  $x$  está no esqueleto de  $X$  se não existir um disco  $D$  contendo  $D(x)$  e contido em  $X$ :

É interessante observar que podemos recuperar uma forma a partir do seu esqueleto e dos raios dos discos maximais centrados em pontos do esqueleto e contidos em  $X$ : De fato, denotando por  $E(X)$  o esqueleto de  $X$  e por  $r(x)$  o raio do disco maximal de centro  $x$  contido em  $X$  temos que

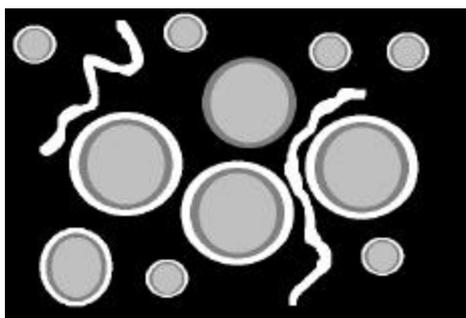
$$X = \bigcup_{x \in E(X)} D_{r(x)}(x)$$

Abaixo vemos uma imagem binária e seu eixo medial.

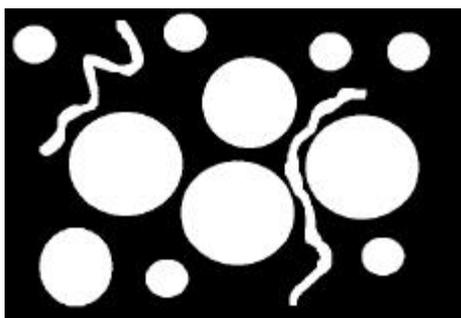


### 3.1.5 Exemplo

Veremos agora um exemplo de como concatenar as várias operações definidas acima para detectar objetos "longos" em uma imagem. Essa técnica poderia ser útil na detecção de vermes larvais em uma imagem de microscópio de um fluxo sanguíneo ([7], p.235).



1. Imagem original.



2. Binarização da imagem original.



3. Eixo medial da imagem 2.



4. Dilatação da imagem 3.



5. Abertura por área de 4.



6. Reconstrução tendo 5 como marcador.

## 3.2 Morfologia em Tons de Cinza

Nesta seção estenderemos as operações morfológicas em imagens binárias para imagens em tons de cinza. A ideia é aplicar a operação binária em cada conjunto de nível da imagem em tons de cinza e depois empilhar esses conjuntos formando uma nova imagem.

### 3.2.1 Operações Monótonas e Conjuntos de Nível

Uma operação  $k$  em conjuntos é dita monótona se  $k(X) \subseteq k(Y)$  sempre que  $X \subseteq Y$ : O leitor pode verificar facilmente que as operações binárias de dilatação, erosão, abertura e fechamento definidas acima são monótonas. Um conjunto (superior) de nível de uma imagem  $u(x)$  é definido por

$$\hat{A}_j(u) = \{x \in R^2 \mid u(x) \geq j\} :$$

A partir de uma operação monótona  $k$  em conjuntos, definimos a operação correspondente  $K$  em funções através da relação

$$Ku(x) = \sup \{j \mid x \in k(\hat{A}_j(u))\}$$

(ver FIGURA). Esse operador  $K$  é invariante por contraste e satisfaz

$$\hat{A}_j(K(u)) = k(\hat{A}_j(u))$$

(ver [3], cap.7).

### 3.2.2 Dilatação e Erosão

A partir da dilatação e da erosão para imagens binárias, definimos a dilatação e a erosão da imagem em tons de cinza  $f$  pelo elemento estruturante  $B$  utilizando a extensão acima. O leitor pode verificar que esta definição nos conduz às fórmulas

$$u \oplus B(x) = \max_{y \in B} u(x + y)$$

e

$$u \ominus B(x) = \min_{y \in B} u(x + y) ;$$

para a dilatação e erosão, respectivamente. Abaixo vemos exemplos de dilatação e erosão para imagens em tons de cinza.

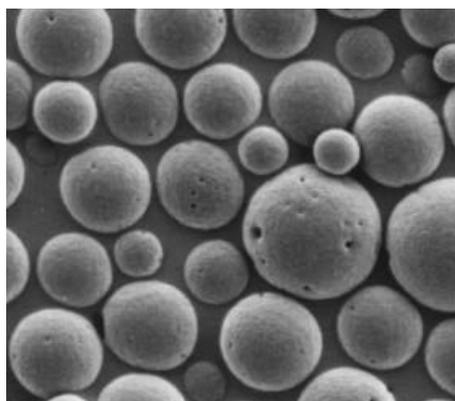
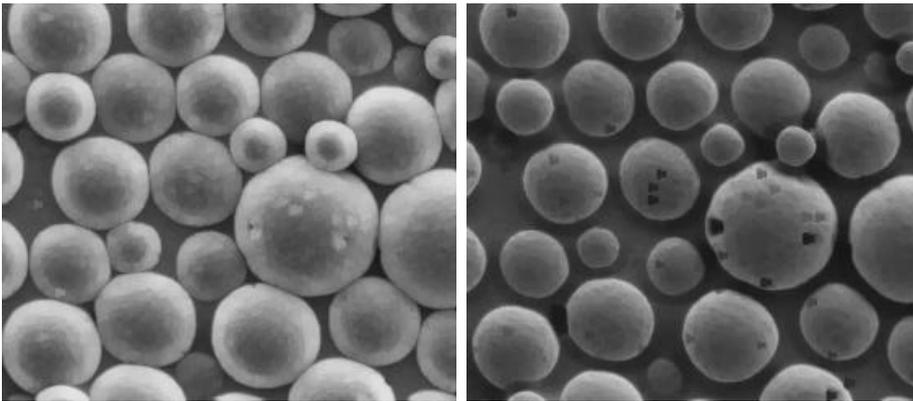


Imagem original.



Dilataçao da imagem original. Erosao da imagem original.

Uma dilataçao condicional  $\oplus_B$  definida por

$$\oplus_B^1(u^m)u = \min((u^m \odot B); u) :$$

e a reconstrucao de  $u$  a partir do marcador  $u^m$   $\oplus$  obtida atraves de uma sequencia de dilataoes condicionais. Para aplicaoes da reconstrucao em tons de cinza, ver [8].

No exemplo abaixo, o marcador foi obtido atraves de duas erosoes da imagem original. Observe os aneis brancos foram reconstruidos apenas nos discos cujo marcador continha algum pixel branco.

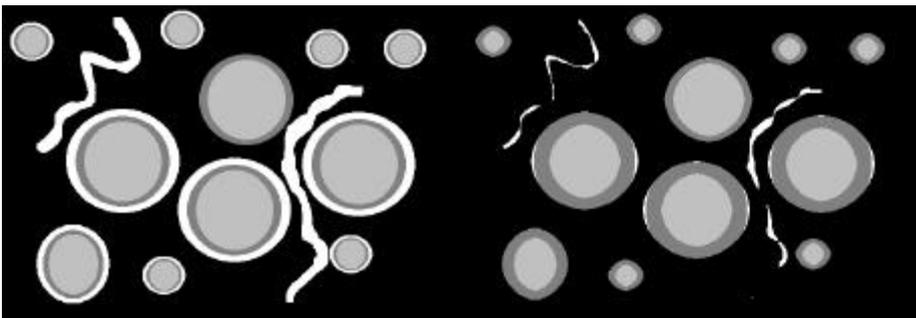
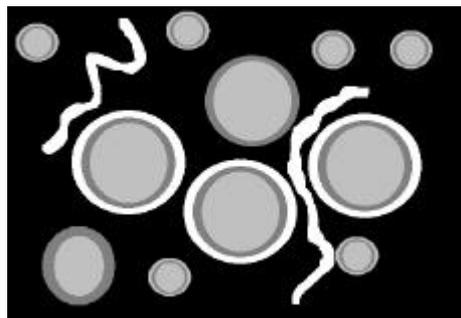


Imagem original.

Marcador.



Reconstrucao da imagem usando o marcador.

### 3.2.3 Abertura e Fechamento

A composicao da erosao e da dilataçao nos fornecem a abertura e o fechamento. Simbolicamente a abertura  $\ominus$  dada por

$$u \ominus B = (u \ominus B) \odot B$$

e o fechamento por

$$u \oslash B = (u \odot B) \ominus B :$$

Vemos abaixo exemplos de abertura e fechamento para imagens em tons de cinza.

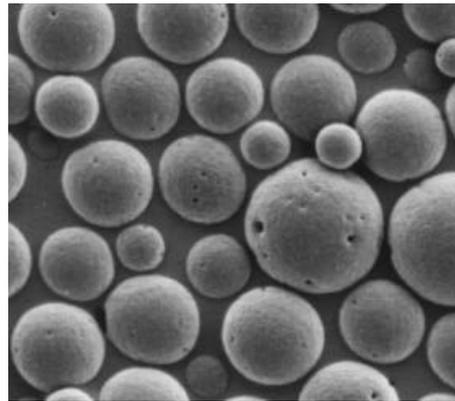
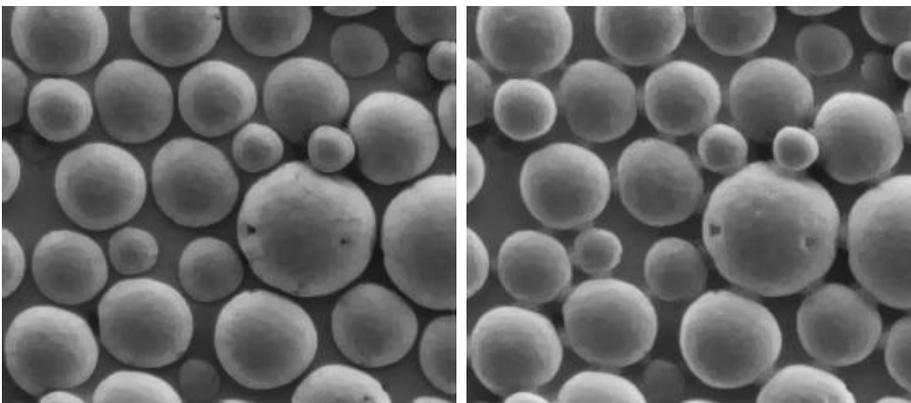


Imagem original.



Abertura da imagem original. Fechamento da imagem original.

### 3.2.4 Filtro da Mediana

Para definir o filtro da mediana para imagens em tons de cinza, utilizamos a extensão usual de operadores binários definida na seção 3.2.1. O leitor pode verificar que esta extensão é equivalente à seguinte:

$$\text{med}_h(u)(x) = \inf_D \sup_{y \in D} u(y) ;$$

onde o número  $h$  é considerado entre as regiões  $D$  contidas em  $B_h(x)$  e com área maior ou igual a  $A(B_h(x))=2$ :

No caso da imagem já discretizada, a mediana é definida por

$$\text{med}_n(u)(x) = \inf_D \sup_{y \in D} u(y) ;$$

onde o número  $n$  é considerado entre os subconjuntos  $D$  da máscara  $M_n(x)$  com número de pixels maior do que  $(2n + 1)^2 = 2$ :

### 3.2.5 Watershed

Uma imagem em tons de cinza pode ser vista como um mapa topográfico, no qual a altura em cada ponto corresponde ao seu nível de cinza. Esse mapa possui vários pontos ou regiões de mínimo. A bacia de um mínimo é o conjunto de pontos para os quais a água escorreria até esse mínimo.

O watershed, ou divisor de águas, é o complementar das bacias dos mínimos de uma imagem. Nos pontos do watershed, a água estaria em dúvida se deveria escorrer para um mínimo ou para outro. Para uma implementação eficiente do watershed, ver [9] ou [5].

Veremos a seguir um exemplo de aplicação do watershed. Nesse exemplo, começamos com uma imagem binária na qual o conjunto  $X$  é constituído de vários objetos, possivelmente superpostos. O objetivo é tentar separar esses objetos. Uma forma interessante para se fazer isto é aplicar o watershed no oposto da função distância  $\mu X^c$ :

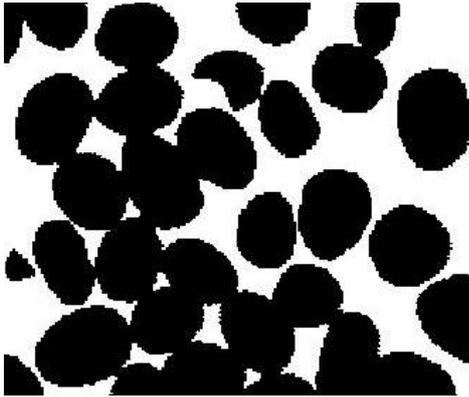
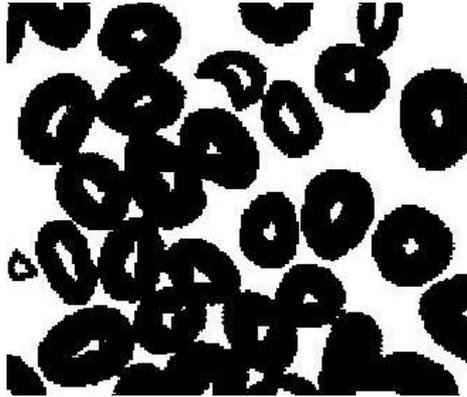
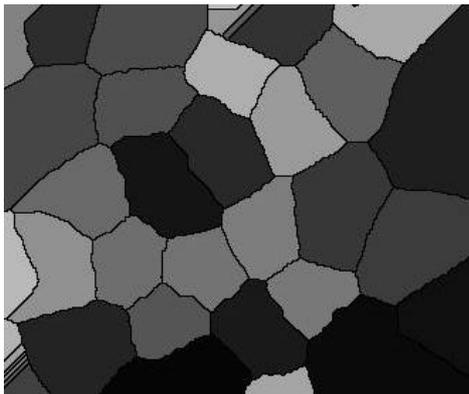


Imagem original.



Mínimos da função distância.



Bacias de atração dos mínimos.

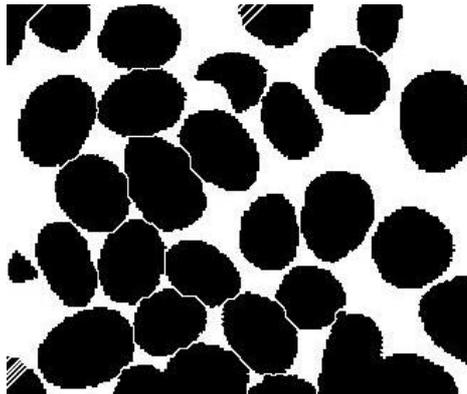


Imagem original segmentada.



# Capítulo 4

## Espaços de Escala Morfológicos

Durante o processo de aquisição de uma imagem, é usual ocorrerem mudanças não-lineares de contraste na imagem. Isto pode ser uma característica do equipamento utilizado ou então por uma intervenção do usuário, como por exemplo a injeção de corantes em imagens biológicas. Por este motivo, muitas vezes queremos trabalhar em um espaço de escala invariante por mudanças de contraste. Um espaço de escala invariante por mudanças de contraste na imagem é chamado de morfológico.

No capítulo anterior vimos vários exemplos de operações morfológicas. Essas operações têm como característica o fato de atuarem nos conjuntos de nível de uma imagem. Da mesma forma, em um espaço de escala morfológico, para analisar a evolução de uma imagem podemos analisar a evolução das suas curvas de nível. E neste capítulo veremos que, na verdade, podemos considerar que cada curva de nível da imagem evolui na direção normal com uma velocidade que depende de sua curvatura.

### 4.1 Curvatura de uma Curva Plana

Considere uma curva plana  $x(s) = (x(s); y(s)); s \in [0; L]$ ; parametrizada pelo comprimento de arco. O vetor velocidade

$$t = \frac{dx}{ds}$$

é um vetor unitário tangente à curva. Um fato interessante é que  $\frac{dt}{ds}$  independe da orientação da curva (verifique!).

A curvatura  $k(s)$  é então definida por

$$\frac{dt}{ds}(s) = k(s)n(s);$$

onde  $n(s)$  é unitário, normal à curva em  $x(s)$ ; e de forma a base  $\{t(s); n(s)\}$  seja positiva. Observe que o sinal da curvatura depende da orientação escolhida, mas sempre muda em pontos de inflexão.

Suponhamos agora que a curva está definida de forma implícita pela fórmula  $u(x) = c$ : Temos então que

$$r u(x(s)) \cdot t(s) = 0;$$

Derivando com relação a  $s$  encontramos

$$Hu(x(s))(t(s); t(s)) + r u(x(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(x(s)) = 0;$$

onde  $Hf$  denota a matriz Hessiana de  $f$ . Observe que nenhum dos fatores da equação acima depende da escolha da orientação da curva. Usaremos então a notação

$$\text{curv}(u)(x) = \frac{1}{\|r u(x)\|} H u(x) \frac{r u(x)}{\|r u(x)\|} \cdot \frac{r u(x)}{\|r u(x)\|} :$$

Temos então que

$$\text{curv}(u)(x) + \frac{r u(x)}{\|r u(x)\|} \cdot k(x) n(x) = 0 :$$

Como  $\frac{r u(x)}{\|r u(x)\|} = S n(x)$ , concluímos que

$$k(x) = S \text{curv}(u)(x) :$$

Em termos de coordenadas, a fórmula para  $\text{curv}(u)$  é dada por

$$\text{curv}(u) = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} :$$

## 4.2 Movimento da Imagem e das suas Curvas de Nível

Proposição 1: Se as curvas de nível de uma imagem evoluem segundo a equação

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F(k(x); t) n(x) ;$$

a imagem evoluirá de acordo com a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|r u\| F(\text{curv}(u); t) :$$

Demonstração: Temos que

$$u(x(t); t) = c :$$

Derivando com relação a  $t$ ; obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x(t)) + r u(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} = 0 :$$

Temos então que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x) + \|r u(x)\| \frac{r u(x)}{\|r u(x)\|} \cdot F(k(x); t) n(x) = 0 ;$$

e portanto

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x) = \|r u(x)\| F(\text{curv}(u); t)(x) :$$

No capítulo 1, vimos que em um espaço de escala morfológico, a imagem deve evoluir segundo uma equação da forma 1.1. A proposição acima nos diz então que, nestes espaços, podemos considerar que as curvas de nível de uma imagem evoluem na direção normal a ela com uma velocidade que depende da sua curvatura.

## 4.3 Movimento por Curvatura

Nesta seção consideraremos o caso particular da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa |u_\kappa| \text{curv}(u);$$

que é chamada equação do movimento por curvatura. O movimento por curvatura pode ser visto como uma evolução das curvas de nível da imagem, cada curva de nível se movimentando na direção normal com velocidade dada pela sua curvatura, i.e.,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \kappa(x)n(x);$$

Voltaremos a falar desse movimento no próximo capítulo e também no apêndice, quando descreveremos algumas de suas propriedades geométricas.

Existe uma relação interessante entre a equação da curvatura e o filtro de medianas. Em [3], está demonstrada a seguinte proposição:

**Proposição 2:** Sendo  $u$  uma função de classe  $C^2$ ; temos que

$$\text{med}_h u(x) = u(x) + \frac{h^2}{6} \kappa |u_\kappa| \text{curv}(u) + O(h^3);$$

Uma consequência dessa proposição é o fato de que a solução da equação da curvatura em um determinado tempo poder ser aproximada por um filtro de medianas com um fator de escala  $h$  apropriado. Esse fato é análogo ao que ocorre com relação as soluções da equação do calor e os filtros de média.

É imediato ver que o movimento por curvatura é invariante por rotações e translações do plano, e também por homotetias da imagem. No entanto, ele não é invariante por transformações afins, como podemos ver na figura abaixo.



Imagem 1

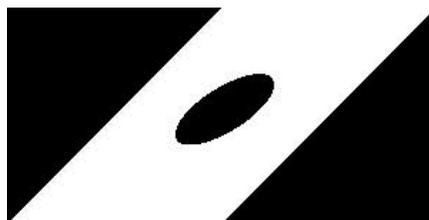


Imagem 2 = Transformação afim da imagem 1



Mov. curvatura da imagem 1



Mov. curvatura da imagem 2

**Exemplo:** Suponha que  $u_0(x; y) = x^2 + y^2$ : O leitor pode verificar facilmente que a solução da equação acima será

$$u(t; x; y) = x^2 + y^2 + 2t;$$

Em geral se  $u_0(x; y) = f(x^2 + y^2)$ ; então, devido a invariância morfológica,

$$u(t; x; y) = f(x^2 + y^2 + 2t);$$

## 4.4 Espaço de Escala Morfológico $A^{-m}$

Em [2], foi demonstrado que existe um único espaço de escala morfológico invariante por transformações  $A^{-m}$ . Este espaço está definido pela equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k r u k (t \text{curv}(u))^{1-3} :$$

Em termos de curvas de nível, a evolução nesse espaço é dada pela equação

$$\frac{\partial x}{\partial t} = k^{1-3}(x)n(x) :$$

# Capítulo 5

## Evolução de Curvas

Neste capítulo, descreveremos evoluções de curvas planas na direção normal à curva, com a velocidade sendo uma função da curvatura. Como vimos no capítulo anterior, estes movimentos são os movimentos realizados pelas curvas de nível de uma imagem evoluindo em um espaço de escala morfológico.

Denotemos por  $x(q; 0); q \in [a; b]$ ; uma curva fechada parametrizada por  $q$ : Consideraremos homotopias  $x(q; t)$  satisfazendo a equação diferencial

$$\frac{\partial x}{\partial t}(q; t) = F(k(q; t))n(q; t) \quad (5.1)$$

onde  $k$  é a curvatura de  $x(q; t)$  no ponto  $x(q; t)$  e  $F(k)$  é alguma função dessa curvatura.

Um problema central nesta evolução é a possibilidade de criação de singularidades. A partir de uma singularidade, a solução da equação acima não é mais única, e é preciso que se determine a solução adequada. A solução adequada se chama solução por viscosidade, e existem inúmeros trabalhos sobre este tema [?]. São também necessários métodos numéricos adequados para que a curva evolua através da solução por viscosidade. Vários métodos numéricos foram propostos com esse fim [11],[12]. Esses métodos numéricos resolveram também vários outros problemas apresentados por estas equações, tais como instabilidade numérica e mudança de topologia.

### 5.1 Movimento por Curvatura

No caso em que  $F(k) = k$ ; temos o chamado movimento por curvatura. Este movimento tem inúmeras propriedades geométricas interessantes que descreveremos no próximo capítulo. Veremos a seguir como esse movimento pode ser visto como descrito por uma equação do calor intrínseca.

Considere uma curva de Jordan parametrizada  $x(q) = (x(q); y(q))$ ,  $q \in [0; L]$ : Suponha que inicialmente o parâmetro  $q$  coincida com o comprimento de arco  $s$ : Para simplificar esta curva, aplicamos a equação do calor a cada coordenada, obtendo curvas  $x(q; t) = (x(q; t); y(q; t))$ ,  $q \in [0; L]$ ; que não estão mais necessariamente parametrizadas pelo comprimento de arco. O problema com essa evolução é que ela não necessariamente simplifica as curvas, podendo criar auto-interseções e singularidades na curva inicial.

Podemos resolver esse problema reparametrizando, a cada passo pequeno, a curva obtida  $x(q; t)$  pelo comprimento de arco. Nesse caso, a evolução da curva satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} x(q; t) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} x(q; t);$$

onde  $s$  é o comprimento de arco da curva  $x(t; t)$ . Essa equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s; t) = k(s; t)n(s; t);$$

que é a equação do movimento por curvatura. Como podemos ver na figura abaixo, esse movimento mantém separados objetos que estavam inicialmente separados.

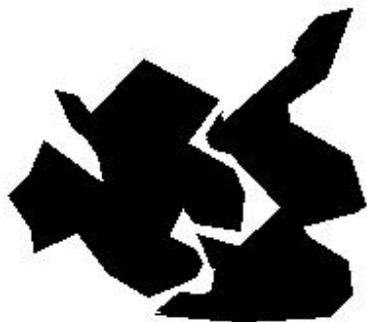


Imagem original



Evolução por curvatura.



Mais tempo de evolução por curvatura

## 5.2 Movimento Anômalo por Curvatura

No caso em que  $F(k) = k^{1/3}$ ; temos o movimento anômalo por curvatura. Este movimento tem a propriedade de ser invariante por transformações anômalas do plano.

Para verificar isto, considere uma curva inicialmente parametrizada pelo comprimento anômalo  $q$ ; i.e., satisfazendo

$$\det\left(\frac{dx}{dq}, \frac{d^2x}{dq^2}\right) = 1;$$

Evolvendo cada coordenada pela equação do calor e reparametrizando-a após cada pequeno passo  $\Delta t$ , o movimento resultante será dado pela equação

$$\frac{\partial x}{\partial t}(q; t) = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}(q; t);$$

que é chamada equação do calor intrínseca anômala. Mas

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = k^{1/3}n + \frac{d^2s}{dq^2}t;$$

e como o termo na direção  $t$  só contribui para um movimento ao longo da curva, concluímos que a evolução da curva deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial x}{\partial t}(q; t) = k^{1/3}(s; t)n(s; t);$$

que é a equação do movimento anômalo por curvatura. Maiores detalhes dessa demonstração o leitor pode encontrar em [3].

## 5.3 Morfologia Diferencial

Consideremos o caso em que  $F(k) = 1$  ou  $F(k) = \frac{1}{3}$ : Neste contexto, a curva evolui na direção normal com velocidade 1; independente da curvatura.

Denotemos por  $X$  a região do plano limitada pela curva fechada  $C$ ; e por  $B$  o disco unitário. Para  $t \geq 0$ ; a dilatação e a erosão de  $X$  pelo elemento estruturante  $tB$  são dadas por

$$X \oplus tB = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists b \in B, x = b + f\}$$

e

$$X \ominus tB = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists b \in B, x = b + f\}$$

respectivamente. Não é difícil se verificar que a fronteira de  $X \oplus tB$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial x}{\partial t} = n$$

enquanto que a fronteira de  $X \ominus tB$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -n$$

(ver [13]).

Evoluir uma curva através dessas equações diferenciais é útil por exemplo na determinação da distância a um conjunto. De fato, a fronteira de  $X \oplus tB$  determina os pontos que estão a uma distância  $t$  de  $X$ : Nesta evolução teremos a criação de singularidades, mas a solução por viscosidade nos fornece a distância procurada (ver [11],[13]).

Vale a pena chamar a atenção para o fato de que a determinação da distância euclidiana a um conjunto é mais precisa utilizando-se a equação diferencial acima do que a dilatação usual com um elemento estruturante discreto. Isto decorre do fato de que a aproximação de um disco em um grid retangular é sempre falha (ver [14]).

## 5.4 Contornos Ativos

Os métodos de Osher-Sethian também se aplicam se tivermos um termo adicional da forma  $r \hat{A}$  adicionado a equação 5.1. É o que ocorre quando consideramos a evolução de uma curva fechada "procurando" delimitar um objeto de uma imagem.

Dada uma imagem  $u$ ; definimos

$$\hat{A}(x) = \frac{1}{kr |u(x)|k + 2}$$

Esta função deve ter um valor pequeno em pontos de grande contraste na imagem. Assim, ao procurarmos contornos de objetos, iniciamos com uma curva de Jordan  $C$  e evoluímos procurando minimizar a "energia"

$$\int_C \hat{A}(x) ds$$

A curva inicial deve envolver algum objeto na imagem.

Consideremos uma parametrização  $x(q; t); 0 \leq q \leq 1$ ; da curva inicial e sua evolução  $x(q; t)$ . A energia de  $x(q; t)$  é então dada por

$$E(t) = \int_0^1 \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 \hat{A} dq$$

Diferenciando com relação a  $t$  obtemos

$$E'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 \hat{A} dq + \int_0^1 \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} dq$$

e portanto, usando integração por partes, concluímos que

$$\begin{aligned}
 E^0(t) &= \int_0^{L(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 ds + \int_0^{L(t)} r \dot{A} \frac{\partial x}{\partial t} ds \\
 &= \int_0^{L(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 ds \\
 &= \int_0^{L(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 ds
 \end{aligned}$$

Logo a direção de decrescimento mais rápido é a direção que satisfaz

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{A} \kappa + h r \dot{A} \tau$$

Como a componente tangencial não influencia na evolução da curva, podemos simplificar esta equação para

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{A} \kappa + r \dot{A} \tau \tag{5.2}$$

que indica a evolução que procuramos para a curva inicial. Maiores detalhes sobre contornos e sua relação com a equação 5.2 pode ser encontrada em [11].

É interessante observar que se tomarmos  $\dot{A}(x) = 1$ ; então a energia será o comprimento da curva e a equação 5.2 passa a ser a equação do movimento por curvatura. Concluímos então que o movimento por curvatura caminha no sentido de minimizar o comprimento das curvas o mais rapidamente possível.

## Apêndice: Propriedades do Movimento por Curvatura

O movimento de uma curva na direção normal a ela com velocidade igual à curvatura é chamado de movimento por curvatura. Esse movimento vem sendo estudado há vários anos e possui várias propriedades geométricas interessantes, todas elas indicando uma "simplificação" da curva. Neste capítulo veremos algumas dessas propriedades.

Denotando por  $x = (x; y)$  o vetor posição, o movimento por curvatura pode ser descrito por uma homotopia de curvas fechadas  $x(q; t); q \in [a; b]$ ; satisfazendo a equação

$$\frac{\partial x}{\partial t}(q; t) = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(q; t);$$

onde  $s$  indica o comprimento de arco ao longo das curvas  $x(s; t)$ :

### Decrescimento do Comprimento e da Área

Denotando por  $v(q; t) = \left| \frac{\partial x}{\partial q}(q; t) \right|$  a norma do vetor velocidade dessas curvas, temos que  $ds = v(q; t)dq$ . A evolução de  $v$  ao longo do tempo é dada pelo seguinte lema:

Lema 1: Temos que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(q; t) = -k^2(q; t)v(q; t);$$

onde  $k$  denota a curvatura da curva  $x(s; t)$  no ponto  $x(q; t)$ :

Demonstração: Diferenciando  $v$  com relação a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t}}{\left| \frac{\partial x}{\partial q} \right|} = \frac{\frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t}}{\left| \frac{\partial x}{\partial q} \right|} \\ &= \frac{\frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial q}(kn)}{\left| \frac{\partial x}{\partial q} \right|} = \frac{k \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial n}{\partial q}}{\left| \frac{\partial x}{\partial q} \right|} \\ &= k \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial n}{\partial s} = -k^2 \frac{\partial x}{\partial q} \cdot t = -k^2 v; \end{aligned}$$

Denotemos por  $\mu(q; t)$  o ângulo que o vetor tangente a curva  $C(t)$  no ponto  $x(q; t)$  faz com o eixo  $x$ :

Lema 2: A derivada do ângulo  $\mu$  com relação ao comprimento de arco é exatamente a curvatura.

Demonstração: Temos que  $t(q; t) = \cos \mu(q; t)i + \sin \mu(q; t)j$ . Derivando com relação a  $s$  obtemos

$$\frac{\partial t}{\partial s} = -\sin \mu \frac{\partial \mu}{\partial s} i + \cos \mu(q; t) \frac{\partial \mu}{\partial s} j;$$

Como  $n(q; t) = -\sin \mu(q; t)i + \cos \mu(q; t)j$  e  $\frac{\partial t}{\partial s} = kn$ ; concluímos que

$$k = \frac{\partial \mu}{\partial s};$$

Denotemos por  $C(t)$  a curva  $x(t; t)$ : O comprimento de  $C(t)$  é dado por

$$L(t) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2} dq ;$$

Diferenciando com relação a  $t$  obtemos

$$L'(t) = \int_a^b k^2 v dq = \int_{C(t)} k^2 ds ;$$

o que mostra que o comprimento de uma curva fechada decresce com o tempo.

Denotemos por  $A(t)$  a área da região do plano limitada pela curva fechada  $C(t)$ : Temos que

$$A(t) = \int_{C(t)} \frac{1}{2} x \zeta n ds = \int_a^b \frac{1}{2} x \zeta \frac{\mu}{\partial q} dq ;$$

onde  $w^\perp$  indica o vetor ortogonal a  $w$ ; obtido de  $w$  por um giro de  $90^\circ$  no sentido anti-horário. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial t} \zeta \frac{\mu}{\partial q} dq - \int_a^b \frac{1}{2} x \zeta \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\mu}{\partial q} dq \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial t} \zeta n ds - \int_a^b \frac{1}{2} x \zeta \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\mu}{\partial q} dq \\ &= \int_{C(t)} \frac{1}{2} k ds + \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial t} \zeta \frac{\mu}{\partial q} dq ; \end{aligned}$$

onde usamos a fórmula do movimento por curvatura na primeira parcela e integração por partes na segunda. Concluímos então que

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \int_{C(t)} \frac{1}{2} k ds - \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial t} \zeta \mu dt dq \\ &= \int_{C(t)} \frac{1}{2} k ds = \int_{C(t)} \frac{\partial \mu}{\partial s} ds ; \end{aligned}$$

Se a curva  $C(t)$  é fechada sem auto-interseções, então a variação total do ângulo  $\mu$  é  $2\pi$ ; e consequentemente

$$\frac{dA}{dt} = -\pi ;$$

o que mostra que  $A(t)$  decresce com uma taxa constante.

### Equações Diferenciais da Curvatura

Lema 3: O tangente e o normal unitários evoluem segundo as equações

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} n$$

e

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial s} t ;$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu}{v} \frac{\partial x}{\partial q} \right) = \frac{1}{v^2} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial q} + v \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial q} \right) \\ &= k^2 t + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (\mu n) = k^2 t + \frac{\partial k}{\partial s} n + k \frac{\partial n}{\partial s} \\ &= k^2 t + \frac{\partial k}{\partial s} n \quad k^2 t = \frac{\partial k}{\partial s} n : \end{aligned}$$

Por outro lado, derivando a identidade  $ht; n_i = 0$  obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} n \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} t \right) = 0$$

e portanto  $\frac{\partial n}{\partial t} t = \frac{\partial k}{\partial s}$ : E derivando a identidade  $hn; n_i = 0$  obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} n \right) = 0 :$$

Proposição: No movimento por curvatura, a curvatura satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3 :$$

Demonstração: Temos que

$$\frac{\partial t}{\partial s} = kn :$$

Derivando com relação a  $t$  obtemos

$$\frac{\partial k}{\partial t} n + k \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu}{v} \frac{\partial t}{\partial q} \right)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} n + k \frac{\partial k}{\partial s} t &= \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} \left( \mu \frac{\partial t}{\partial t} \right) + \frac{1}{v^2} k^2 v \frac{\partial t}{\partial q} \\ &= \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} \left( \mu \frac{\partial k}{\partial s} n \right) + k^3 n \\ &= \frac{\partial k}{\partial s} k t + \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3 n : \end{aligned}$$

Concluímos que

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3 :$$

No caso da curva  $C(t)$  ser convexa, podemos utilizar o ângulo  $\mu$  como parâmetro para a curva. Utilizando este parâmetro, foi provado em [18] que a curvatura evolui segundo a equação

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \mu^2} + k^3 :$$

Essa equação é o ponto de partida para a demonstração de vários dos teoremas descritos nas próximas seções.

## Convexidade e Inexistência de Singularidades

Consideremos um movimento por curvatura no qual a curva inicial é fechada sem auto-interseções. Como vimos acima, o tempo de vida de uma tal curva é  $T = \frac{A(0)}{2^{\frac{1}{4}}}$ ; onde  $A(0)$  é a área da região do plano limitada pela curva  $C(0)$ : O que ocorre com a curva  $C(t)$ ; para  $t$  no intervalo  $[0; T)$ ? Essa pergunta já foi estudada por vários pesquisadores e descreveremos os resultados nessa seção.

A curva inicial é fechada sem auto-interseções, mas não necessariamente convexa. O movimento por curvatura tende a deixar a curva cada vez mais convexa. E foi demonstrado em [19] que existe um tempo  $0 < t_c < T$  tal que  $C(t_c)$  é convexa. Em [18], foi demonstrado que uma curva inicialmente convexa permanece sempre convexa. E também que ela permanece uma curva sem singularidades e sem auto-interseções.

A evolução de uma curva com uma auto-interseção foi estudada em [20]

## Circularização das Curvas

O movimento por curvatura tende a circularizar uma curva convexa. Em [18], foi provado que a curva se aproxima de um círculo de forma  $C^1$ ; no sentido de que a razão entre a curvatura mínima e máxima tende a 1; e as derivadas de ordem maior ou igual a 1 da curvatura tendem a 0:

Uma outra forma de ver a circularização no limite é através da razão isoperimétrica  $\frac{L^2(t)}{A(t)}$ : é um fato bem conhecido que essa razão é sempre maior ou igual a  $4\pi$ ; com a igualdade valendo somente no caso de círculos. Em [17], foi provado que  $\frac{L^2(t)}{A(t)}$  tende a  $4\pi$ ; quando  $t$  tende a  $T$ :

Uma terceira forma de ver essa circularização é através dos raios interno,  $r_{int}(t)$ ; e externo,  $r_{ext}(t)$ ; da curva  $C(t)$ : Em [17] está provado que  $\frac{r_{int}(t)}{r_{ext}(t)}$  tende a 1; quando  $t$  tende a  $T$ :

Abaixo vemos a evolução de uma elipse com grande excentricidade.



Curva inicial



Movimento por curvatura



Mais movimento por curvatura

# Bibliografia

- [1] Formalization and Computational Aspects of Image Analysis, L.Alvarez, J.M.Morel- Acta Numerica, pp.1-59, 1994.
- [2] Axioms and Fundamental Equations of Image Processing, L.Alvarez, F.Guichard, P.L.Lions, J.M.Morel- Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol.16(9), pp.200-257, 1993.
- [3] Image Iterative Smoothing and P.D.E.'s, F.Guichard, J.M.Morel- pre-print.
- [4] Software Megawave-<http://www.cmla.ens-cachan.fr/Cmla/Megawave/presentation.html>
- [5] Morfologia Matemática- Teoria e Exemplos, J.Facon- Ed.PUC-PR, 1996.
- [6] Morphological Image Analysis- Principles and Applications, P.Soille- Springer-Verlag, 1999.
- [7] Sinan Batman and John Goutsias- Morphological Methods for Biomedical Image Analysis- Handbook of Medical Imaging. Volume 2. Medical Image Processing and Analysis- M. Sonka and J. M. Fitzpatrick (Eds.) pp. 175-272, SPIE Optical Engineering Press, 2000.
- [8] Luc Vincent- Morphological Grayscale Reconstruction in Image Analysis: Applications and Efficient Algorithms- IEEE Trans.Image Processing, vol.2, n.2, abril 1993.
- [9] Luc Vincent and Pierre Soille- Watersheds in Digital Spaces: An Efficient Algorithm Based on Immersion Simulations- IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.13, n.6, junho 1991.
- [10] Level Set Methods and Fast Marching Methods, J.A.Sethian- Cambridge University Press, 1999.
- [11] Numerical Algorithms for Propagating Interfaces: Hamilton-Jacobi Equations and Conservation Laws, J.A.Sethian- J.Differential Geometry, vol.31, pp.131-161, 1990.
- [12] Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations, S.Osher, J.A.Sethian- J.of Computational Physics, vol.79, pp.12-49, 1988.
- [13] Implementing Continuous-Scale Morphology via Curve Evolution, G.Sapiro, R.Kimmel, D.Shaked, B.B.Kimia, A.M.Bruckstein- Pattern Recognition, vol.26, n.9, pp.1363-1372, 1993.
- [14] Differential Morphology and Image Processing, P.Maragos- IEEE Trans. on Image Processing, vol.5, n.6, 1996.

- [15] Evolution Equations for Continuous-Scale Morphological Filtering, R.W.Brockett, P.Maragos- IEEE Trans. on Signal Processing, vol.42, n.12, 1994.
- [16] The Morphological Structure of Images: The Differential Equations of Morphological Scale-Space, R.van den Boomgaard, A.Smeulders- IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.16, n.11, 1994.
- [17] Curve Shortening Makes Convex Curves Circular, M.E.Gage-Inventiones Math., vol.76, pp.357-364, 1984.
- [18] The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves, M.Gage, R.S.Hamilton- J.Differential Geometry, vol.23, pp.69-96, 1986.
- [19] The Heat Equation Shrinks Embedded Plane Curves to Round Points, M. Grayson- J.Differential Geometry, vol.26, pp.285-314, 1987.
- [20] The Shape of a Figure-Eight under the Curve Shortening Flow, M. Grayson- Inventiones Math., vol.96, pp.177-180, 1989.